# Tutorato Analisi I - 08/02/24

**Recap**

1) $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge $\iff \alpha < 1$ $\qquad \varepsilon > 0$

2) $\int_M^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge $\iff \alpha > 1$ $\qquad M > 0$

Sono "equivalenti":

Assumiamo di sapere 2), allora

$$t = \frac{1}{y}, \quad dt = -\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_{+\infty}^{1/\varepsilon} \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha}\left(-\frac{1}{y^2}\,dy\right) = \int_{1/\varepsilon}^{+\infty} y^{\alpha-2}\,dy =$$

$$= \int_{1/\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{y^{\underline{2-\alpha}}}\,dy \quad \text{converge} \overset{\text{per la 2)}}{\iff} \underline{2-\alpha} > 1 \iff \alpha < 1$$

cioè deduciamo 1).

E in modo <u>identico</u> da 1) deduciamo 2).

**Recap.** (Condizione NECESSARIA per la convergenza di una serie numerica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Quando dobbiamo discutere la convergenza di una serie al variare di un parametro, spesso questo criterio ci permette di rimuovere un po' di casi.

**Esercizio 1** **(Solo I anno)** Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie

$$\sum_n \underbrace{\left(1 - \cos\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}\right)\right)(n+1)^3}_{a_n}.$$

## Soluzione

Cosa dobbiamo osservare innanzitutto:

- $\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ se $\alpha \neq 0$ (infatti in tal caso $\alpha^2 > 0$)
- $1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

  cioè $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$

- Caso $\alpha \neq 0$

$$1 - \cos\Bigg(\underbrace{\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}}_{t}\Bigg) \sim \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{2\alpha^2}$$

e $t \to 0$ per $n \to +\infty$

$$a_n = \left(1 - \cos\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}\right)\right)(n+1)^3 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^3}{(n+2)^{2\alpha^2}}$$

Ora, per $n \to +\infty$, abbiamo $n+1 \sim n$
$n+2 \sim n$

$n+1 = n\Big(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 1}\Big)$

è il termine "dominante"

e quindi:

$$a_n \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{n^3}{n^{2\alpha^2}} = \frac{1}{2}\, n^{\boxed{3-2\alpha^2}}$$

la stima vale per ogni $\alpha \neq 0$

Criterio precedente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & , \ 3-2\alpha^2 > 0 \quad \text{NON CONV.} \\ 0 & , \ 3-2\alpha^2 < 0 \quad \underline{\text{POTREBBE}}\ \text{CONV.} \\ \frac{1}{2} & , \ 3-2\alpha^2 = 0 \quad \text{NON CONV.} \end{cases}$$

- Se $3-2\alpha^2>0$ $\left(\text{cioè } \alpha^2 < \frac{3}{2}, \text{ ossia } -\sqrt{\frac{3}{2}} < \alpha < \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$,

  allora $a_n \xrightarrow[n]{} +\infty$, quindi $\sum_n a_n = +\infty$.

  → La serie diverge (a $+\infty$).

- Se $3-2\alpha^2=0$ $\left(\text{cioè } \alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, allora

  $a_n \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2}$, quindi $\sum_n a_n = +\infty$

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = +\infty$$

  $$a_n \sim \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_n a_n \sim \sum_n \frac{1}{2} = +\infty$$

  → La serie diverge (a $+\infty$)

- Se $3-2\alpha^2<0$ $\left(\text{cioè } \alpha < -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee \alpha > \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

  allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, quindi per il criterio infinitesimale la serie

POTREBBE convergere

$\sum_n a_n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$\not\Longleftarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ nonostante $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Applichiamo il Teorema del confronto asintotico:

$$a_n \sim \frac{1}{2} n^{3-2\alpha^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha^2-3}}$$

Recap. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ $\begin{cases} \text{converge} & \Longleftrightarrow \beta > 1 \\ \text{diverge } (a +\infty) & \Longleftrightarrow \beta \leq 1 \end{cases}$

Il nostro $\beta$ è $2\alpha^2 - 3$

Per il Teorema, abbiamo che (per $\alpha \neq 0$)

$\sum_n a_n$ ha lo stesso comportamento di $\frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{n^{2\alpha^2-3}}$

e $\frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{n^{2\alpha^2-3}}$ converge $\Longleftrightarrow 2\alpha^2 - 3 > 1$

$\Longleftrightarrow \alpha^2 > 2$

$\Longleftrightarrow \alpha < -\sqrt{2} \;\vee\; \alpha > \sqrt{2}$

mentre diverge ($a +\infty$) $\Longleftrightarrow -\sqrt{2} \leq \alpha \leq \sqrt{2}$ *

* Attenzione, la stima $a_n \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha^2-3}}$ vale per $\alpha \neq 0$, quindi il caso $\alpha = 0$ va trattato separatamente!

- Caso $\alpha = 0$.

$$a_n = \left(1 - \cos\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^0\right)\right)(n+1)^3 =$$

$$= \underbrace{(1-\cos 1)}_{>0}(n+1)^3 \xrightarrow[n]{} +\infty$$

Quindi di nuovo troviamo che $\sum_n a_n$ diverge (a $+\infty$).

In conclusione, la serie $\begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < -\sqrt{2} \vee \alpha > \sqrt{2} \\ \text{diverge } (a +\infty) & \text{se } -\sqrt{2} \le \alpha \le \sqrt{2} \end{cases}$.

---

In sintesi, cosa abbiamo fatto?

Data $\sum_n a_n$,

- Calcolo $\lim_n a_n$ per applicare la $\overbrace{\text{"condizione necessaria per la convergenza"}}^{\lim_n a_n = 0}$
- Sviluppo asintotico di $a_n$ (per $\alpha \neq 0$)
- Confronto asintotico con la serie armonica generalizzata

Oss. Una volta trovato lo sviluppo asintotico $a_n \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha^2-3}}$, possiamo direttamente fare il confronto con l'armonica generalizzata, non è importante fare lo studio $\lim_n a_n = 0$ (gli $\alpha$ per cui $a_n \not\xrightarrow[n]{} 0$ sono già esclusi dal confronto con l'armonica gen.).

**Esercizio 2** Studiare la funzione $f(x) = |3-x|e^{2x}$ determinandone punti di massimo e di minimo locali, massimo e minimo assoluti o estremi superiore e inferiore, asintoti e convessità.

Soluzione

1) Dominio di $f$ : $\mathbb{R}$

2) Eventuali simmetrie : $f(-x) = |3+x|\,e^{-2x} \neq \pm f(x)$

non ce ne sono.

3) Limiti agli estremi del dominio :

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{|3-x|}_{\to+\infty}\ \underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{|3-x|}_{\to+\infty}\ \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} \underset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty} |3+t|\,e^{-2t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{|3+t|}{e^{2t}} = 0 \quad \text{gerarchia infiniti}$$

In particolare, la retta $y=0$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $f$.

4) Intersezioni con gli assi cartesiani :

asse $x$ : $f(x) = 0 \iff |3-x|\underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0 \iff x=3$

asse $y$ : $f(0) = 3$

Quindi i punti di intersezione con gli assi cartesiani sono $(3,0)$ e $(0,3)$.

[4.1) Segno : $f(x) = \underbrace{|3-x|}_{\geq 0}\ \underbrace{e^{2x}}_{>0} \geq 0$ , $f(x)>0$ per ogni $x\neq 3$ ]

5) Eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

ORIZZONTALI: $y = 0$, già visto;

VERTICALI: non ce ne sono, perché il dominio è $\mathbb{R}$;

OBLIQUI: se ce ne sono, sono per $x \to +\infty$, ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|3-x|\, e^{2x}}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x-3}{x}}_{\to 1} \underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}$$

$\Rightarrow$ non ce ne sono.

6) Max / min, inf / sup.

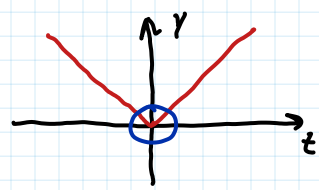
La funzione $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ $\nearrow$ $e^{2x}$ continua, $|3-x|$ continua

ma non è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ c'è un valore assoluto!

Recap. $g(x)$ derivabile,

la funzione $|g(x)|$ non è derivabile

nei punti $x$ tali che $g(x) = 0$




$\rightsquigarrow$ $g(x) = t$, $y = |t|$
non è derivabile in $t = 0$

quindi $f(x)$ NON è derivabile in $x = 3$ $\left(f(x) = |3-x|\, e^{2x}\right)$

ma in tutti gli altri (cioè $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$) $f(x)$ è derivabile

(infinite volte) perché lo sono $e^{2x}$ e $|3-x|$.

Calcoliamo $f'(x)$ per $x \neq 3$

$$f(x) = |3-x|\, e^{2x} = \text{sgn}(3-x)\,(3-x)\,e^{2x}$$
$$= \begin{cases} (3-x)\,e^{2x}, & x \leq 3 \\ (x-3)\,e^{2x}, & x > 3 \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata di $(3-x)\,e^{2x}$.

questa è $(3-x)'\,e^{2x} + (3-x)\,(e^{2x})' =$

$$= -e^{2x} + (3-x)\,2\,e^{2x} =$$
$$= e^{2x}(6-2x-1) = e^{2x}(5-2x)$$, quindi:

$$f'(x) = \begin{cases} (5-2x)\,e^{2x}, & x < 3 \\ (2x-5)\,e^{2x}, & x > 3 \end{cases}$$

Studiamo la natura del punto di non derivabilità $x = 3$.

Per un Teorema (limite della derivata ...), basta calcolare

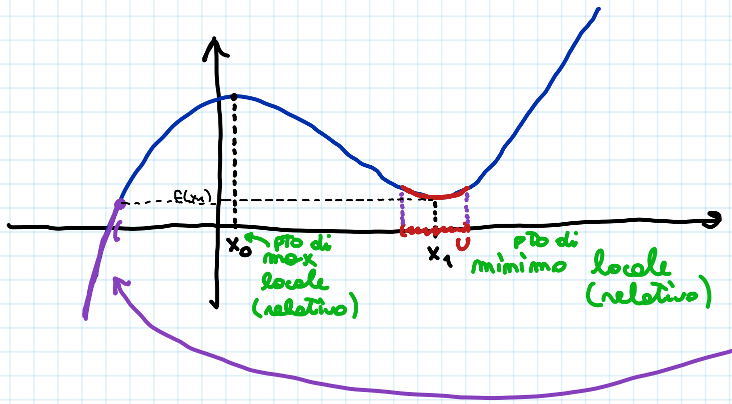
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} f'(x) &= (6-5)\,e^6 = e^6 \\ \lim_{x\to 3^-} f'(x) &= -e^6 \end{aligned}\right\}$$

$x = 3$ è un PUNTO ANGOLOSO per $f(x)$

- Studiamo max / min **locali** di $f(x)$.

**Recap.** $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$.

- $x_0$ si dice **STAZIONARIO** se $f'(x_0) = 0$
- $x_0$ si dice **PUNTO DI MAX/MIN** **LOCALE** (= **RELATIVO**) se esiste un intorno $U$ di $x_0$ tale che per ogni $x \in U$ si ha $\underset{\text{MAX}}{f(x) \leq f(x_0)} \Big/ \underset{\text{MIN}}{f(x) \geq f(x_0)}$




nell'intorno $U$ di $x_1$, la funzione è sempre $\geq$ di $f(x_1)$, quindi $x_1$ è un pto di min. LOCALE ma non assoluto!

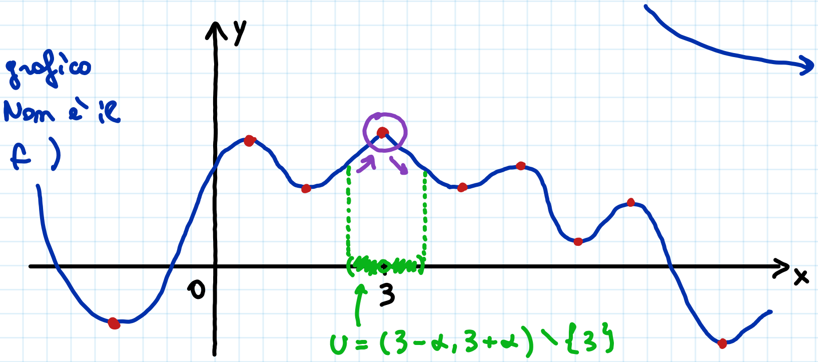
Per funzioni derivabili, i punti di max/min locale si cercano imponendo

$$f'(x) = 0 .$$

Nel nostro caso, $f(x)$ NON è derivabile in $x = 3$, quindi ?

**Strategia**:
- cerco pti di max/min di $f$ per $x \neq 3$ (DERIVATA!)
- studio la **monotonia** in un intorno di $x = 3$

Esempio di grafico A CASO! (Non è il grafico di $f$)




$f$ non è derivabile in $x = 3$ ma è derivabile in un intorno "bucato" $U$ di $x = 3$

$(3-\alpha, 3+\alpha) \setminus \{3\}$

Studio la monotonia qui per capire se $x = 3$ è un pto di max/min locale oppure no.

- se $x = 3$ è pto di max/min locale, confronto con gli altri pti (e con $\sup(f)$ / $\inf(f)$) per capire se è assoluto.

$$f'(x) = \begin{cases} (5-2x)\,e^{2x}, & x < 3 \\ (2x-5)\,e^{2x}, & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} (5-2x)\,e^{2x} = 0 \\ x < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} (2x-5)\,e^{2x} = 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

la prima è la stessa eq

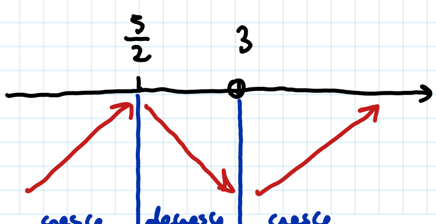
$$\iff \begin{cases} (5-2x)\,e^{2x} = 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \iff 5-2x = 0 \iff x = \frac{5}{2}.$$

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = \left|3-\tfrac{5}{2}\right| e^{2\cdot\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}e^{5}$$

Monotonia (per $x \neq 3$)

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} x < 3 \\ (5-2x)\,\cancel{e^{2x}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ (2x-5)\,\cancel{e^{2x}} > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < 3 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \iff x < \frac{5}{2} \ \vee\ x > 3$$




$\rightsquigarrow$ $x = \frac{5}{2}$ è un punto di MAX locale

$x = 3$ è un punto di MIN locale (angoloso)

- Studiamo $\inf(f)$ e $\sup(f)$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \implies \sup f = +\infty$

* Per l'inf: $f(x) = \underbrace{|3-x|}_{\geq 0}\,\underbrace{e^{2x}}_{>0} \geq 0$

$f(x)=0 \iff x=3$, dato che $f(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$,
troviamo che $x=3$ è un punto di minimo ASSOLUTO

$\inf(f) = \min(f) = 0$, raggiunto da $x=3$.

7) Convessità.

Di nuovo, $f$ è derivabile 2 (infinite) volte per $x\neq 3$.

$$f'(x) = \begin{cases} (5-2x)e^{2x}, & x<3 \\ (2x-5)e^{2x}, & x>3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}[(5-2x)e^{2x}]' &= (5-2x)'e^{2x} + (5-2x)(e^{2x})' \\ &= -2e^{2x} + (5-2x)2e^{2x} \\ &= (5-2-2x)e^{2x} \\ &= (3-2x)e^{2x}.\end{aligned}$$

Quindi:

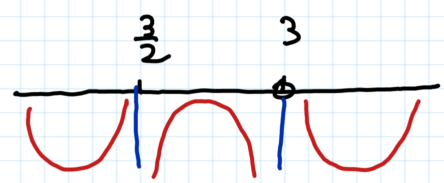
$$f''(x) = \begin{cases} (3-2x)\,e^{2x}, & x < 3 \\ (2x-3)\,e^{2x}, & x > 3 \end{cases}$$

Punti di flesso : $f''(x) = 0 \iff 3 - 2x = 0$

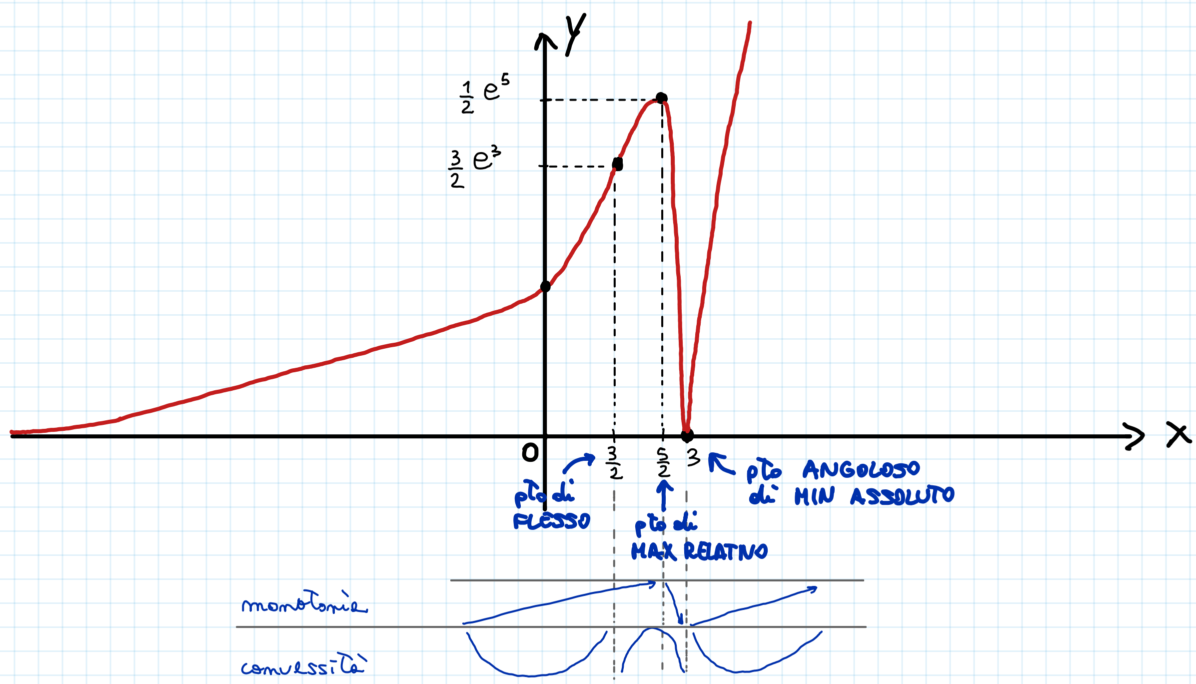
$\iff x = \frac{3}{2}$

Concavità : $f''(x) > 0 \iff \begin{cases} x < 3 \\ (3-2x)\,\cancel{e^{2x}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ (2x-3)\,\cancel{e^{2x}} > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < 3 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \iff x < \frac{3}{2} \quad \vee \quad x > 3$




8) Grafico della funzione



Modo più semplice per disegnare il grafico di $f(x)$:

- studiare la funzione $g(x) = (3-x)\,e^{2x}$; ← derivabile su $\mathbb{R}$, meno problemi!
- tracciarne il grafico;
- dedurre il grafico di $f(x) = |g(x)| = |3-x|\,e^{2x}$

  ↳ simmetrizzare la parte di grafico con $y<0$ rispetto all'asse $x$.

---

**Domanda 4** La funzione $f(x) = \dfrac{x \arctan|x|}{e^x}$

A) è limitata sia superiormente che inferiormente

B) non è limitata né superiormente né inferiormente

~~C)~~ è limitata superiormente ma non inferiormente

D) è limitata inferiormente ma non superiormente

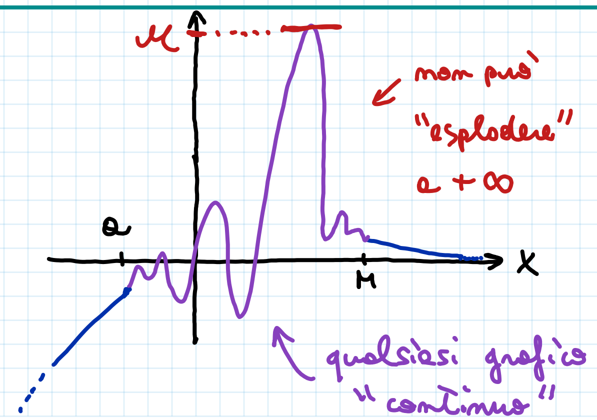
Prima cosa da fare: limiti agli estremi del dominio (che in questo caso è $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \text{gerarchia degli infiniti}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}\frac{(-\infty)\cdot\frac{\pi}{2}}{0^+}\text{"} = -\infty$$

Dato che il dominio è $\mathbb{R}$ (e la funzione $f$ è continua su $\mathbb{R}$) allora deduciamo che $f$ è LIMITATA SUPERIORMENTE ma ILLIMITATA INFERIORMENTE:

Intuitivamente:




Formalmente:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \exists M>0$ t.c. $f(x)<1$ per ogni $x>M$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists a<0$ t.c. $f(x)<1$ per ogni $x<a$

$f$ continua ammette max $\mathcal{M}$ su $[a, M]$ (Weierstrass)

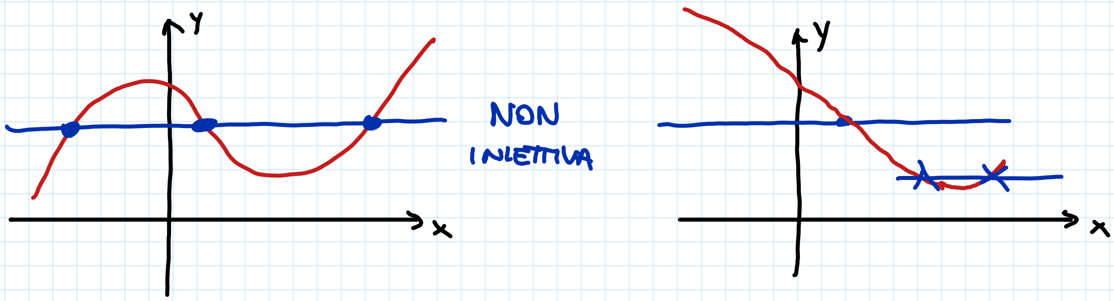
$\Rightarrow$ $f(x) < \mathcal{M}$ su $[a, M]$, $f(x) < 1$ su $(-\infty, a)\cup(M,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f$ limitata superiormente

**Esercizio** Stabilire se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin(x)$ è iniettiva, surgettiva, bigettiva.

**Soluzione**

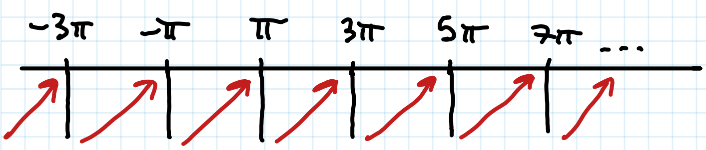
$f$ è continua (e derivabile) su tutto $\mathbb{R}$. Quindi vale:

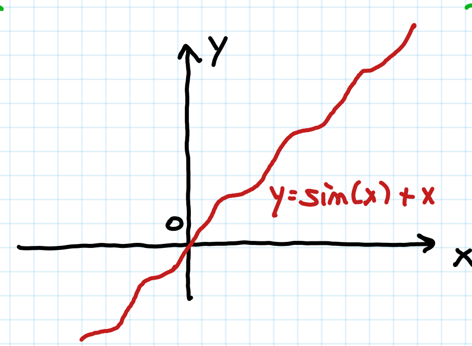
$f$ iniettiva $\Longleftrightarrow$ $f$ strettamente monotona




$$f'(x) = 1+\cos(x)$$

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1+\cos(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos(x) > -1$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \neq \pi + 2k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z}$$




$f$ è strettamente crescente $\Rightarrow$ $f$ è iniettiva.

Inoltre, poiché $f$ è continua su tutto $\mathbb{R}$,

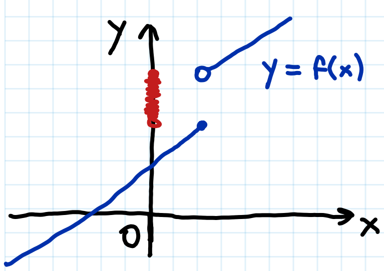
$f$ surgettiva $\underset{\text{f continua su } \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \inf(f) = -\infty \\ \sup(f) = +\infty \end{cases}$

Essendo $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin(x)) = -\infty \end{cases}$, si ha $\begin{cases} \sup(f) = +\infty \\ \inf(f) = -\infty \end{cases}$

quindi $f$ è anche surgettiva (e quindi è bigettiva).

## • ESEMPI SU CUI RIFLETTERE...

• Continuità di $f$ NECESSARIA :

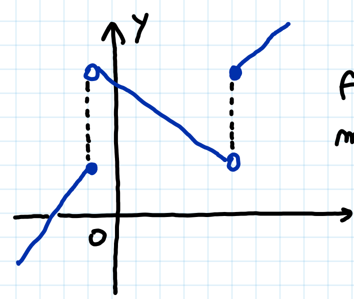



$\sup(f) = +\infty$

$\inf(f) = -\infty$

$f$ NON SURGETTIVA

(non assume i valori in rosso)

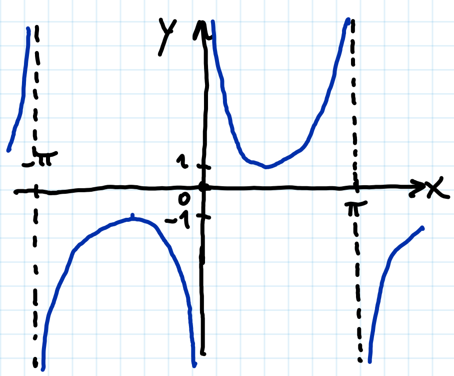



$f$ INIETTIVA

ma non monotona

• Continuità di $f$ SU TUTTO $\mathbb{R}$ necessaria per la surgettività:

(o su un intervallo)



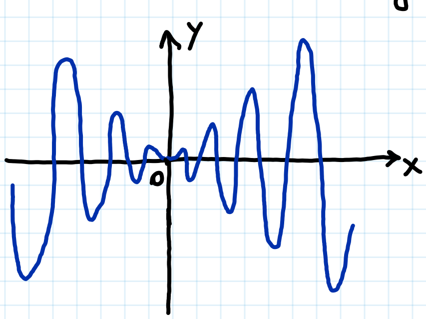

$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} = \csc(x)$ è CONTINUA nel suo dominio!

e tale che $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$

ma NON è surgettiva (ad esempio non assume mai 0)

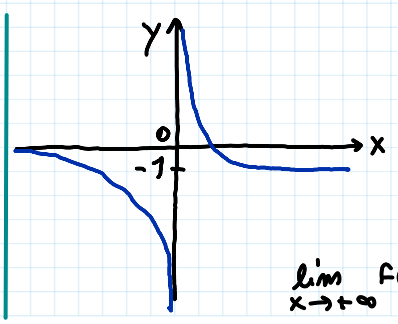
• $f$ continua e surgettiva $\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \in \{\pm\infty\}$




$f(x) = x \sin(x)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

NON ESISTE




$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 , & x > 0 \\ \frac{1}{x} , & x < 0 \end{cases}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

CONTINUA e SURGETTIVA

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ , $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ .